ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

С.В.Ведерников

ПРОСТРАНСТВО КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

Определим в алгебре $M(n)$ (квадратичных матриц порядка n над полем R) структуру G-пространства при помощи отображения $\alpha: G\times M(n)\to M(n): (a,x)\to axa^{-1}$, где $G=GL(n,R)$. Выделим орбиту с условием $\mathcal{K}=\{x\mid x\in M(n), x^2=-E\}$. Так как для любого $x\in\mathcal{K}$ найдется такое $a\in G$, что $x=a\varepsilon a^{-1}$, где $\varepsilon=\begin{pmatrix}0&E\\-E&0\end{pmatrix}$, то орбита определяется однозначно

$$\mathcal{K}=\{x\mid x=a\varepsilon a^{-1},\ a\in G\}. \qquad (1)$$

Очевидно, что любой элемент орбиты $\mathcal{K}$ есть оператор комплексной структуры, поэтому естественно назвать $\mathcal{K}$ пространством комплексных структур. Изучим геометрию этого пространства методом, разработанным в [1].

Как и в случае пространства пар касательное расслоение

$$T(\mathcal{K})=\{(x,\omega)\mid x\in\mathcal{K},\omega\in M(n), x\omega+\omega x=0\} \qquad (2)$$

или

$$T_\varepsilon(\mathcal{K})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \beta&-\alpha\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in M\left(\tfrac{n}{2}\right)\right\}.$$

Так как $tr\,\omega=0$, то полиномиальные морфизмы $P:T(\mathcal{K})\to M(n)$: $(x,\omega)\to P(x,\omega)$ имеют следующий вид

$$P(x,\omega)=xP_1(\omega)+P_2(\omega) \qquad (3)$$

Аналогично случаю пространства пар определим билинейные формы на $\mathcal{K}$:

$$P: T(\mathcal{K})\oplus T(\mathcal{K})\to R: (x,\omega,\theta)\to tr[P(x,\omega,\theta)]=\langle\omega,\theta\rangle. \qquad (4)$$

В силу билинейности P относительно ω и θ и условий (2) следует, что

$$\langle\omega,\theta\rangle=\alpha\,tr(x\omega\theta)+\beta\,tr(x\theta\omega)+\gamma\,tr(\omega\theta);\quad \alpha,\beta,\gamma\in R.$$

Так как $tr(x\omega\theta)=-tr(\omega x\theta)=-tr(x\theta\omega)$, то форма

$$[\omega,\theta]=tr(x\omega\theta) \qquad (5)$$

кососимметрична (внешняя форма). Тогда $\langle\omega,\theta\rangle=\alpha[\omega,\theta]+\beta(\omega,\theta)$, т.е. любая билинейная форма на $\mathcal{K}$ является произвольной линейной комбинацией внешней формы и симметрической формы. Легко проверить, что симметрическая форма $(\omega,\theta)=tr(\omega\theta)$ невырожденна, и, следовательно, определяет инвариантную псевдориманову метрику на $\mathcal{K}$. Однако в общем случае структура не будет римановой, так как легко подобрать матрицу ω такую, что $(\omega,\omega)=0$, т.е. выбрать изотропное направление.

Введем невырожденный оператор

$$J_x: T_x(\mathcal{K})\to T_x(\mathcal{K}):\quad \omega\to x\omega, \qquad (6)$$

который определит на $\mathcal{K}$ почти комплексную структуру.

Т е о р е м а 1. На многообразии $\mathcal{K}$ имеется инвариантная почти комплексная структура, которая вместе с псевдоримановой и симплектической структурой определит на $\mathcal{K}$ инвариантную кэлерову метрику эллиптического типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Невырожденная форма $[\omega,\theta]$ определит симплектическую структуру на $\mathcal{K}$, причем $[J_x(\omega),\theta]=[\omega,\theta]$. Замкнутость формы симплектической структуры очевидна, поэтому, следуя [2], нам осталось доказать согласованность введенных структур, т.е. равенство $(J_x(\omega),J_x(\theta))=(\omega,\theta)$. В самом деле $(J_x(\omega),J_x(\theta))=tr(x\omega x\theta)=-tr(x^2\omega\theta)=tr(\omega\theta)=(\omega\theta)$. По аналогии с [1] вводится средняя связность $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+J\nabla_X JY)$. Очевидно, что она будет удовлетворять всем условиям связности, индуцированной кэлеровой структурой эллиптического типа.

Т е о р е м а 2. Кручение почти комплексной структуры многообразия $\mathcal{K}$ определяется полиномиальным морфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственными вычислениями показывается, что связность $\overline{\nabla}$ будет почти комплексной связностью [2]. Тогда ее кручение $t(X,Y)$

связано с кручением почти комплексной структуры $T(X,Y)$ формулой [3]:

$$T(JX,JY)-JT(JX,Y)-J(T(X,JY))-T(X,Y)=\frac{1}{2}t(X,Y). \qquad (7)$$

Но

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\bar{\nabla}_X Y=h(X,Y),$$

где $h(X,Y)$ -2-я билинейная форма структуры J на многообразии K .Форма $h(X,Y)$ будет определяться полиномиальным морфизмом по формуле (4).
Тогда и (7) будет определяться полиномиальным морфизмом,так как (6) выражается полиномом.

Список литературы

1.Ведерников С.В. Геометрия пространства пар.- Известия АН БССР.Рукопись депонирована в ВИНИТИ 15 апреля 1980г.,№ 1454-80 Деп.

2.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,1979,т.9,с.5-246.

3.Кобаяси С.,Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, М.,1981,т.2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Ю.Е.Гликлих

О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ,ОБЛАДАЮЩИХ РИМАНОВЫМ РАВНОМЕРНЫМ АТЛАСОМ

При изучении ряда вопросов теории стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см.[1,2]) предполагаются выполненными некоторые условия на многообразие,которые можно свести к единственному требованию:нужно,чтобы многообразие допускало риманову метрику,обладающую римановым равномерным атласом.В настоящей работе показано,что на любом многообразии существует риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.Для доказательства мы модифицируем методы [3,4] исследования выпуклых окрестностей и полных метрик. В определенном смысле результаты работы являются обобщением [3]:метрика,обладающая римановым равномерным атласом,очевидно,является полной и,так же как в [3],указанная метрика может быть построена как конформная для любой заранее заданной метрики.

Пусть M -связное конечномерное риманово многообразие, ρ -функция риманова расстояния на M (см.[4]).

Определение. Атлас на M назовем равномерным римановым,если для любой точки $m\in M$ существует карта (U,φ), $U\ni m$ из этого атласа,такая,что U содержит метрический шар $B(m,r)$ с центром в m фиксированного радиуса $r>0$ относительно риманова расстояния ρ.

Отметим,что метрический шар $B(m,r)=\{n\in M \mid \rho(m,n)<r\}$, вообще говоря,не гомеоморфен шару модельного пространства и может иметь сложную топологическую структуру.

Теорема. Для любой римановой метрики на M существует конформная ей риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.

2 Зак. 1401